

# Modelli di illuminazione



*Dove si discutono modelli per l'interazione della luce con le superfici.*

- **Introduzione**
- **Modello di Phong**
- **Modello di Cook-Torrance**
- **Tipi di luci**
- **Rendering con ray casting**
- **Ray tracing**
- **Radiosity**

## Introduzione

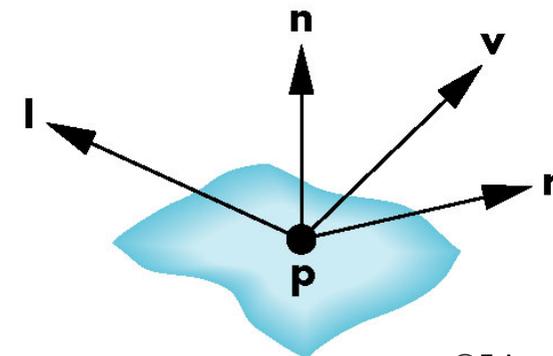
- Abbiamo introdotto la BRDF che descrive il comportamento di una superficie per quanto riguarda l'interazione con la luce.
- Abbiamo introdotto l'equazione della radianza, che descrive – in principio – ogni possibile immagine di una scena.
- Ci concentreremo ora su un modello di illuminazione **locale**, che tratta l'interazione tra una sorgente ed una singola superficie.
- Nei modelli locali ciascun punto viene trattato indipendentemente dal resto della scena (no interriflessioni, no ombre, no riflessioni speculari)
- Il modello che vedremo è semplice, abbastanza veloce da funzionare in tempo reale e produce risultati accettabili, per scene semplici.
- Riprenderemo poi il ray casting per introdurre il **ray tracing**, un metodo globale che tratta le riflessioni speculari.
- Discuteremo infine il metodo **radiosity**, in qualche senso ortogonale al ray tracing, che modella riflessioni tra diffusori perfetti.

## Modello locale di Phong

- Sia  $P$  il punto della superficie di cui si vuole calcolare il colore. Questo equivale a calcolare l'intensità luminosa  $I^{out}$  lungo la direzione  $\mathbf{v}$ , che congiunge  $P$  con il COP.
- Consideriamo una sorgente di luce puntuale che emette un raggio luminoso in ogni direzione. Il raggio che incide in  $P$  ha direzione  $\mathbf{l}$  ed intensità luminosa  $I$ .
- L'intensità  $I^{out}$  viene calcolata come somma di quattro componenti: luce ambientale, luce diffusa, luce riflessa e luce emessa:

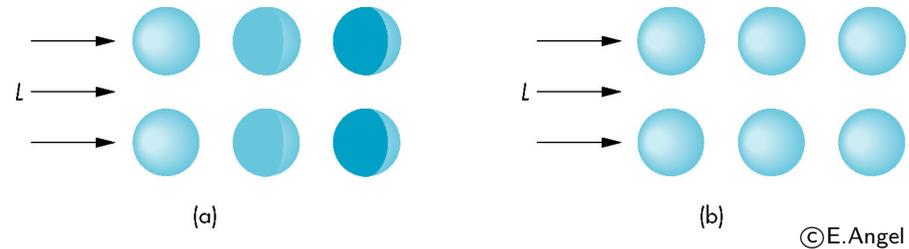
$$I^{out} = I_a^{out} + I_d^{out} + I_s^{out} + I_e^{out}$$

- Come vedremo, l'intensità luminosa  $I^{out}$  dipende da  $I$ , dalla orientazione della superficie in  $P$ ,  $\mathbf{n}$ , dalla posizione di sorgente luminosa,  $\mathbf{l}$ , ed osservatore,  $\mathbf{v}$  e dalle proprietà intrinseche del materiale che la compone.



©E.Angel

- Nel modello locale conta la direzione  $I$  sotto cui il punto vede la luce, non importa se il percorso che connette il punto alla sorgente è ostruito (no ombre).

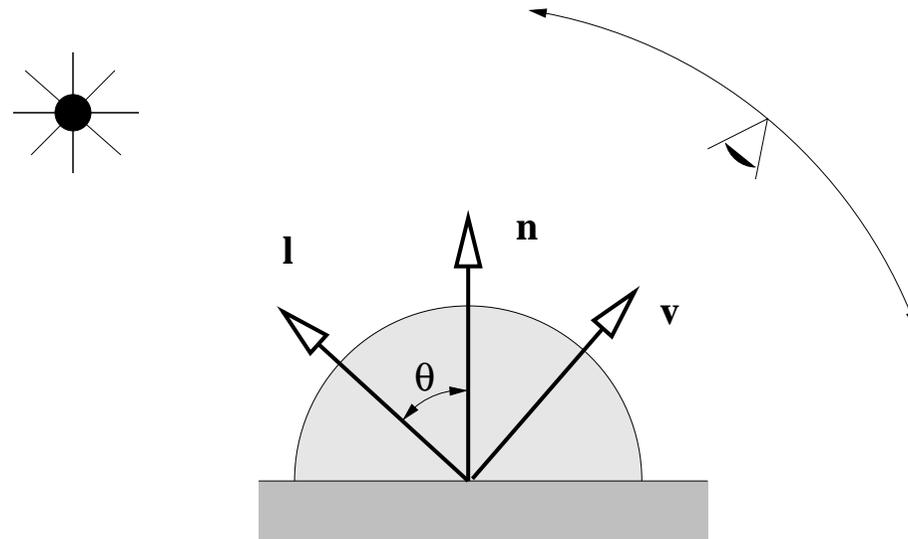


- **Attenzione:** identifichiamo l'intensità luminosa  $I$  (concetto non ben definito) con la radianza. La  $I$  è il valore che viene assegnato al pixel.
- La luce viene considerata composta da **tre componenti cromatiche** R,G,B. Si calcola l'illuminazione indipendentemente per ogni componente cromatica, ottenendo un colore.
- Se sono presenti più sorgenti luminose, per il principio di sovrapposizione degli effetti, calcoliamo l'illuminazione indipendentemente per ogni sorgente e per ogni componente cromatica e poi sommiamo.
- Nel seguito faremo riferimento ad una singola componente cromatica ed una singola sorgente luminosa.

## Componente diffusa

- Il secondo contributo a  $I^{out}$  è la cosiddetta **componente diffusa** o di **riflessione lambertiana**.
- Non dipende dalla direzione di vista  $\mathbf{v}$ , ma solo da  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{l}$ : una superficie lambertiana appare egualmente luminosa da qualunque direzione la si guardi.
- Simula il comportamento di alcuni materiali (per esempio il gesso, o il coccio) i quali riflettono la luce che ricevono in maniera uniforme in tutte le direzioni

- L'intensità di questa luce riflessa dipende solo dall'angolo tra la direzione della luce vista da  $P$ , ovvero  $\mathbf{l}$ , e la normale in  $P$ , che indichiamo con  $\mathbf{n}$  e supponiamo di norma unitaria.



- Il modello lambertiano prevede un contributo all'intensità del punto pari a

$$I_d^{out} = I k_d \cos \theta = I k_d (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})$$

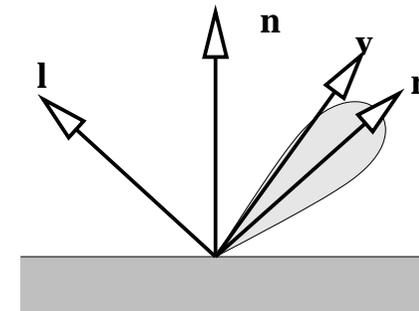
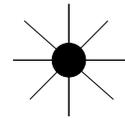
dove  $I$  è l'intensità della luce incidente,  $k_d$  è il **coefficiente di riflessione diffusa** del materiale che compone l'oggetto e  $\theta$  è l'angolo tra  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{n}$

- Tale angolo si presuppone compreso nell'intervallo  $[0, \pi]$ , altrimenti si pone l'intensità della componente diffusa pari a zero.

## Componente speculare (di Phong)

- La luce però può anche essere riflessa da un corpo **specularmente**, ovvero seguendo le leggi della riflessione dell'**ottica geometrica**

- In tal caso la luce viene riflessa in una direzione  $\mathbf{r}$  che è ottenuta “specchiando”  $\mathbf{l}$  rispetto a  $\mathbf{n}$
- L'osservatore vede la luce riflessa solo se  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r} = 1$ .



- Si può dimostrare che per calcolare  $\mathbf{r}$  vale la seguente formula:

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) - \mathbf{l}$$

- La componente speculare in realtà vuole modellare non solo la riflessione speculare perfetta, ma anche la caratteristica di **lucidità** (*glossy*) della superficie.

- Phong (1975) introduce il seguente modello empirico (non ha un significato fisico) per la componente speculare

$$I_s^{out} = I k_s (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v})^n$$

dove  $I$  è la luce incidente,  $k_s$  è il **coefficiente di riflessione speculare** ed  $n$  l'**esponente di riflessione speculare** del materiale.

- L'esponente  $n$  modula la lucidità della superficie. Per  $n$  che tende ad infinito si ha una riflessione speculare perfetta.
- Esiste una formulazione che fa uso del *halfway vector*  $\mathbf{h}$ , il vettore che biseca l'angolo formato da  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{v}$ . Il termine di riflessione speculare diventa:

$$I_s^{out} = I k_s (\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n \quad \text{dove } \mathbf{h} = \frac{\mathbf{l} + \mathbf{v}}{\|\mathbf{l} + \mathbf{v}\|}$$

- questo offre vantaggi quando la luce e l'osservatore sono distanti, poiché  $\mathbf{h}$  è costante per tutti i punti dell'oggetto (mentre  $\mathbf{r}$  non lo è).
- si osservi che l'angolo tra  $\mathbf{n}$  ed  $\mathbf{h}$  non è lo stesso che c'è tra  $\mathbf{r}$  e  $\mathbf{v}$ ; lo stesso esponente non produce gli stessi effetti.
- comunque anche questo è un buon modello empirico che produce superfici lucide visivamente credibili.

## Luce ambientale

- I modelli locali non simulano la riflessione multipla della luce (interriflesioni)
- Questo significa che se una superficie punto di un oggetto non è rivolto verso la luce, allora risulterà completamente nero.
- Si introduce allora nel modello locale un termine che prende il nome di **luce ambientale**, caratterizzata con una intensità  $I_a$ , che tiene conto dell'illuminazione indiretta dovuta alle interriflesioni.
- Alla superficie viene quindi assegnato un **coefficiente di riflessione ambientale**  $k_a$  compreso tra 0 ed 1.
- Il contributo all'intensità finale del punto da parte della luce ambientale sarà dato da

$$I_a^{out} = I_a k_a$$

## Sommiamo il tutto

- Sommando quanto visto fino ad ora, otteniamo la seguente espressione per l'intensità di colore di un punto  $P$

$$I^{out} = I_a k_a + I (k_d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) + k_s(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n) \quad (1)$$

- Se si stanno considerando i colori, allora sia le intensità della luce che i coefficienti del materiale vanno definiti per ogni componente (r,g,b)

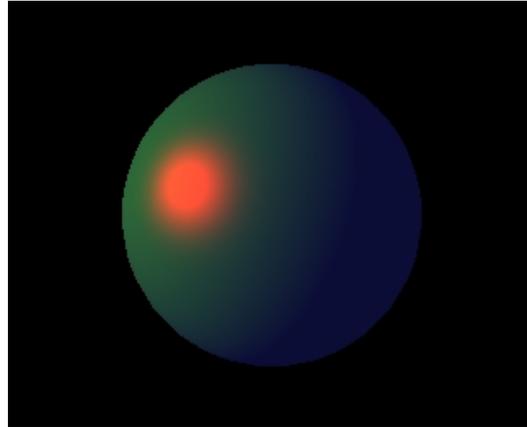
$$I^{r,out} = I_a^r k_a^r + I^r (k_d^r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) + k_s^r(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n)$$

$$I^{g,out} = I_a^g k_a^g + I^g (k_d^g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) + k_s^g(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n)$$

$$I^{b,out} = I_a^b k_a^b + I^b (k_d^b(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) + k_s^b(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n)$$

- Il colore della superficie si determina fissando i coefficienti di luce ambientale  $(k_a^r, k_a^g, k_a^b)$  e di diffusione  $(k_d^r, k_d^g, k_d^b)$  (di solito sono uguali).
- La superficie apparirà del colore specificato dalla terna di coefficienti quando illuminata da luce bianca.
- Le riflessioni speculari (highlights) invece sono di solito del colore della luce, non della superficie, quindi i coefficienti  $(k_s^r, k_s^g, k_s^b)$  sono sempre (1,1,1), indipendentemente dal colore della superficie.

- La figura sotto mostra il risultato ottenuto assegnando colori diversi ai coefficienti ambientale, di diffusione e speculare di un oggetto.



- Può succedere che una o più componenti cromatiche eccedano il loro limite massimo (256 o 1 a seconda della rappresentazione).
- Questo accade specialmente quando si sommano i contributi di diverse sorgenti luminose.
- In tal caso si possono adottare varie strategie; la più semplice è quella di effettuare un **clamping**, ovvero se un  $I^{out}$  supera il valore massimo lo si pone pari a questo. Oppure si possono rinormalizzare i valori di  $I^{out}$  al valore più alto ottenuto nell'immagine

- La formula (1) prende il nome di **modello di Phong**, anche se, a rigore, il contributo di Phong riguarda il solo termine speculare.
- Il modello, nella forma più generale, prevede tre componenti separate per le sorgenti di luce (come sul Buss): luce speculare  $I_s$  (ovvero che verrà riflessa specularmente dalle superfici), luce diffusa  $I_d$  (ovvero che verrà diffusa dalle superfici, e luce ambientale  $I_a$  (che interagisce il coefficiente ambientale della superficie).
- Nella trattazione precedente abbiamo assunto  $I_s = I_d = I$ .
- Il fatto che una sorgente di luce non emetta luce e basta, ma luce di tre tipi diversi (speculare, diffusa e ambientale) pur non avendo un significato fisico, serve a rendere il modello più flessibile (posso simulare effetti globali con un modello locale).
- Per esempio, la luce ambientale  $I_a$  potrà in generale avere un colore diverso dalla  $I$ . Questo serve a rendere più realistico l'effetto della mutua illuminazione tra le superfici: in una stanza con le pareti rosse, la luce ambientale è rossa.
- Inoltre, la luce ambientale è associata ad ogni sorgente e non è un termine globale unico, perché così quando una luce viene spenta (o accesa) l'illuminazione ambientale diminuisce (o aumenta)



(1) Ambientale

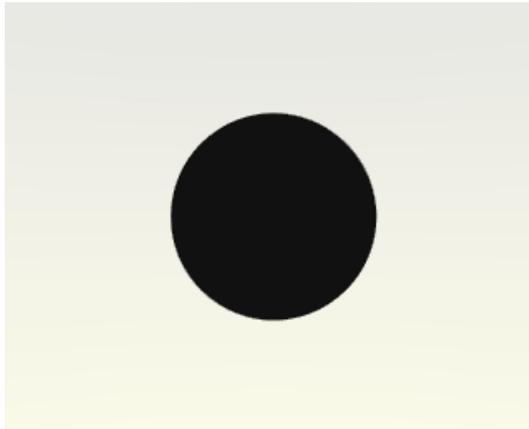


(2) Ambientale + Diffusa

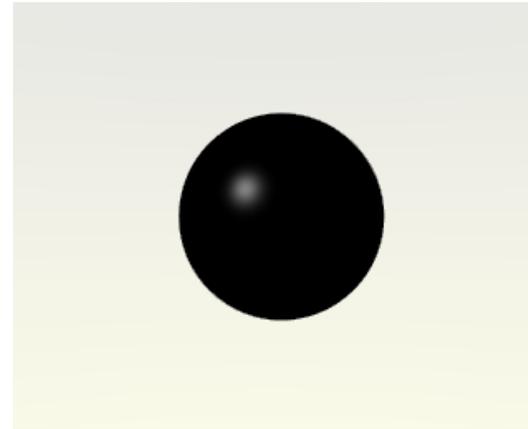


(3) Ambientale + Diffusa +  
Speculare

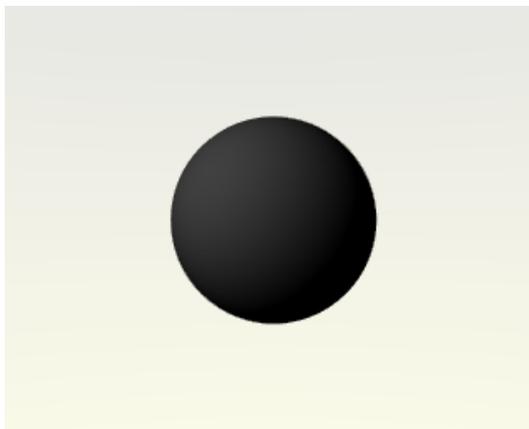
©Alan Watt



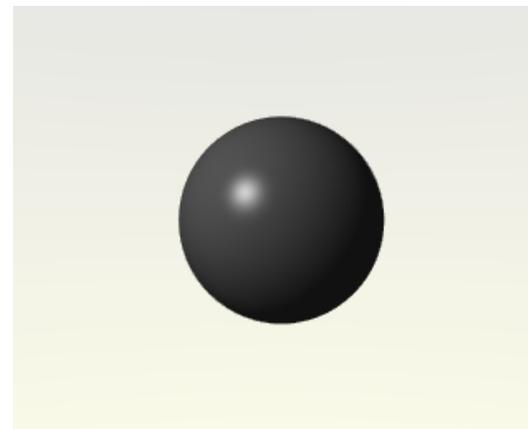
(4) Ambientale



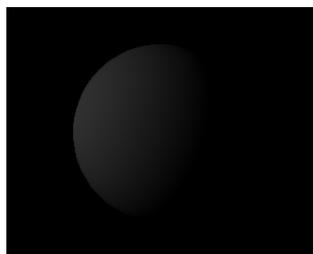
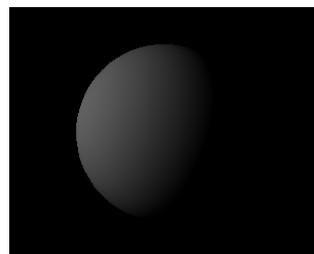
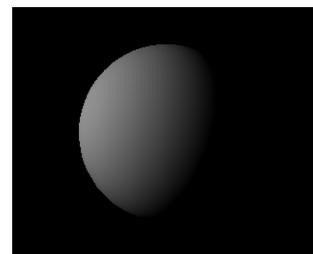
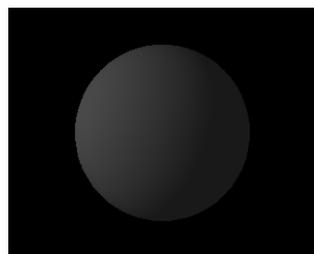
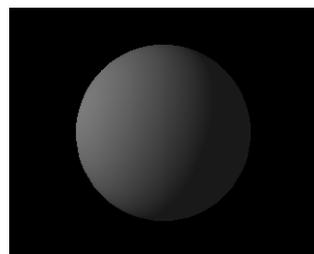
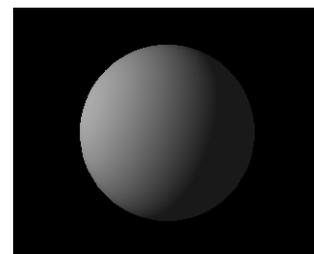
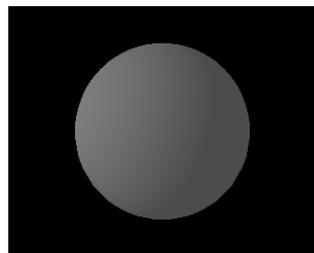
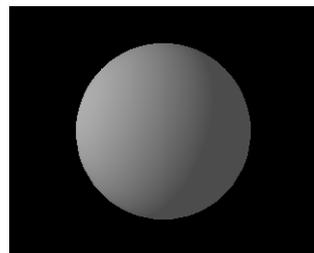
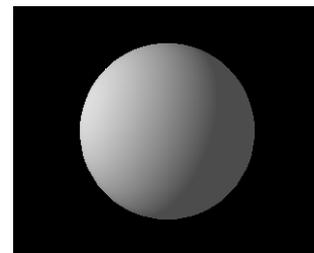
(5) Speculare



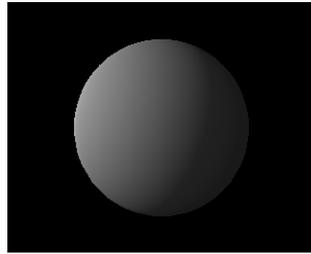
(6) Diffusa



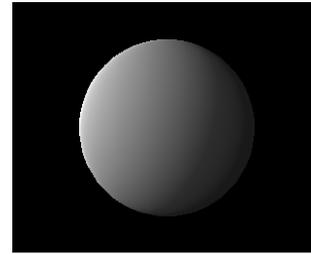
(7) Totale

$I_a = 0$ (8)  $k_d = 0.3$ (9)  $k_d = 0.6$ (10)  $k_d = 0.9$  $I_a = 0.1$ (11)  $k_d = 0.3$ (12)  $k_d = 0.6$ (13)  $k_d = 0.9$  $I_a = 0.3$ (14)  $k_d = 0.3$ (15)  $k_d = 0.6$ (16)  $k_d = 0.9$

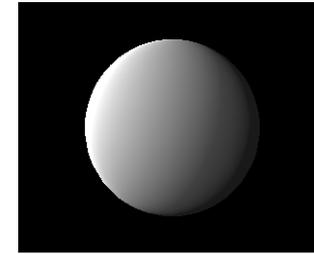
$n = 1$



(17)  $k_s = 0.1$

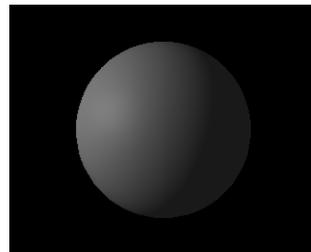


(18)  $k_s = 0.25$

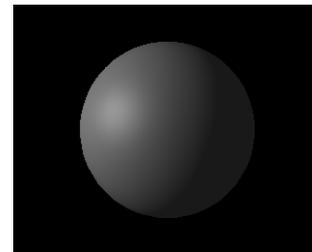


(19)  $k_s = 0.5$

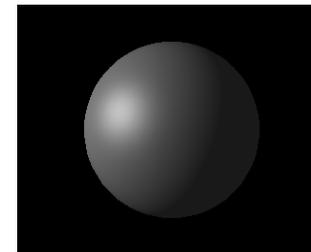
$n = 20$



(20)  $k_s = 0.1$

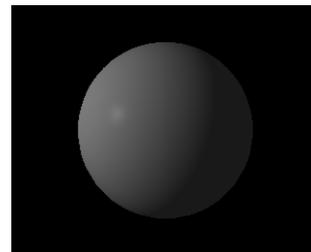


(21)  $k_s = 0.25$

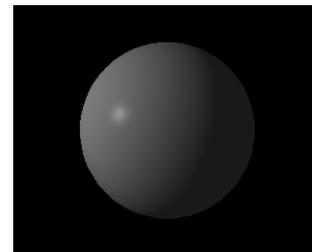


(22)  $k_s = 0.5$

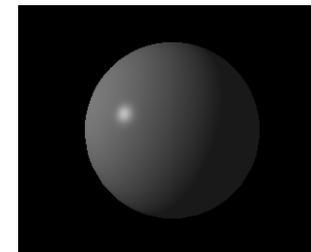
$n = 200$



(23)  $k_s = 0.1$



(24)  $k_s = 0.25$



(25)  $k_s = 0.5$

## BRDF di Phong

- Vediamo come connettere il modello locale di Phong con l'equazione della radianza, per capire che tipo di approssimazioni sono state fatte.
- Abbiamo introdotto le sorgenti di luce puntuali, che sono distinte dagli oggetti della scena, dunque per tutte le superfici della scena  $L_e = 0$ .
- Il COP è nella posizione  $x$  e vogliamo determinare la radianza  $L(x, \boldsymbol{\omega})$  associata ad un certo pixel, il cui raggio ha direzione  $\boldsymbol{\omega}$ .
- Sia  $x'$  il primo punto di intersezione del raggio con una superficie. Siccome la radianza è costante lungo il raggio,  $L(x, \boldsymbol{\omega}) = L(x', \boldsymbol{\omega})$
- Dobbiamo quindi calcolare

$$L(x, \boldsymbol{\omega}) = L(x', \boldsymbol{\omega}) = \int_{\Omega} L(x, \boldsymbol{\omega}_i) \rho(x, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}) (\boldsymbol{\omega}_i \cdot \mathbf{n}) d\boldsymbol{\omega}_i$$

- Ma esiste una sola direzione lungo la quale il contributo all'integrale è diverso da zero: la direzione  $\boldsymbol{\omega}_L$  che punta alla sorgente luminosa. Otteniamo dunque:

$$L(x', \boldsymbol{\omega}) = L(x, \boldsymbol{\omega}_L) \rho(x, \boldsymbol{\omega}_L, \boldsymbol{\omega}) (\boldsymbol{\omega}_L \cdot \mathbf{n})$$

- Confrontando con il modello di Phong (senza il termine ambientale)

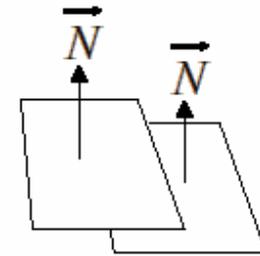
$$I^{out} = I \left( k_d + k_s \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n}{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{l})$$

e confondendo la radianza  $L$  con la intensità  $I$ , si vede che la BRDF di Phong è:

$$\rho(x, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_r) = k_d + k_s \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n}{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\omega}_i)} \quad \text{dove } \mathbf{h} = \frac{\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_r}{\|\boldsymbol{\omega}_i + \boldsymbol{\omega}_r\|}$$

## Attenuazione della luce

- Se due superfici distinte e parallele nella scena, costituite dallo stesso materiale, si sovrappongono nell'immagine, è impossibile distinguere dove finisce una e comincia l'altra, poiché avranno esattamente lo stesso colore, in base al modello locale.



©Van Dam

- Per ottenere risultati più realistici, in genere si introduce un coefficiente di **attenuazione della luce**,  $f_{att}$ , che moltiplica la luce incidente  $I$ , per tener conto che l'intensità della luce emessa da un punto che raggiunge una superficie decresce con l'inverso del quadrato della distanza:

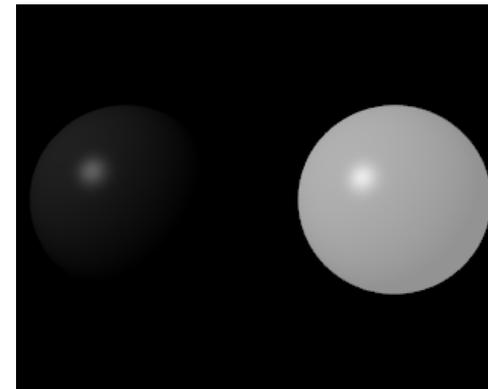
$$f_{att} = \min \left( \frac{1}{c_1 + c_2 d_L + c_3 d_L^2}, 1 \right)$$

dove  $d_L$  è la distanza percorsa dalla luce dalla sorgente alla superficie,  $c_1, c_2, c_3$  sono coefficienti che consentono di modulare l'effetto.

- Nota: In teoria dovrebbe essere  $f_{att} = \frac{1}{d_L^2}$ , ma la formula scritta sopra produce risultati empiricamente migliori.
- Comunque **il modello di Phong non ha l'ambizione di essere un modello fisico.**

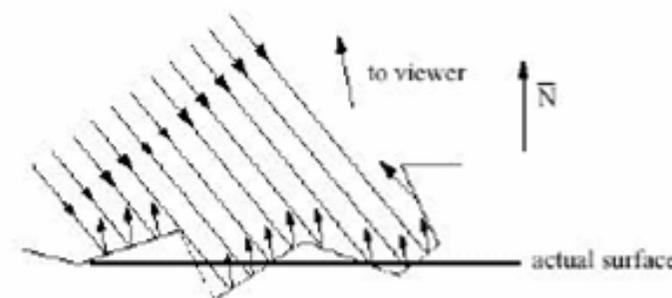
## Emissione

- Si può associare ad un oggetto una **intensità di emissione**  $I_e^{out}$  da aggiungere all'intensità calcolata con la formula (1).
- L'effetto di tale termine è che l'oggetto emette un proprio colore oltre alla luce riflessa dalla sorgente luminosa.
- Da notare che siccome stiamo lavorando con un modello locale, la luce emessa in questo modo da un oggetto influenza l'apparenza solo di quell'oggetto e non l'apparenza degli oggetti vicini (ovviamente poco realistico).
- Ovvero: un corpo emissivo **non** si comporta come una sorgente luminosa, in questo modello locale.



## Modello di Cook-Torrance (cenni)

- Il modello di Cook-Torrance è più sofisticato di quello di Phong, ed è basato sul modello *microfacets* della superficie, che descrive la superficie come formata da piccole facce disposte in modo variabile.



©Van Dam

- Il modello di Cook-Torrance differisce da quello di Phong nella componente speculare.

$$I_s^{out} = I_s k_s \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}} FGD$$

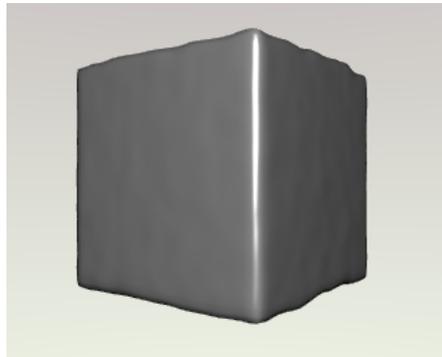
dove  $D(\mathbf{l}, \mathbf{v})$  misura la frazione di microfacette orientate in modo da dare riflessione speculare da  $\mathbf{l}$  a  $\mathbf{v}$ ,  $G(\mathbf{l}, \mathbf{v})$  misura la diminuzione di luce riflessa a causa dell'occlusione da parte di altre microfacette,  $F(\mathbf{l}, \mathbf{v}, \lambda)$  è il coefficiente di Fresnel che fornisce la frazione di luce incidente che viene riflessa.

- È un modello che ha un significato fisico.

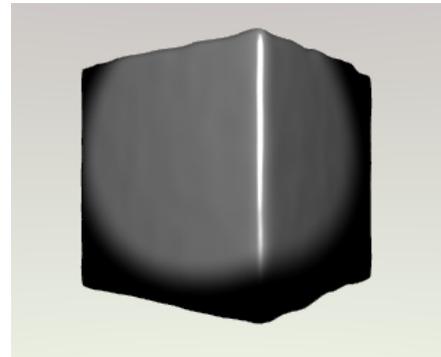
## Tipi di luci

- Fino ad ora abbiamo trattato essenzialmente solo due tipi di luci, la **luce ambientale** ed una **sorgente puntuale**. Sebbene siano i tipi di luci più usate, per raggiungere certi effetti è comodo introdurre almeno tre altri tipi di luce
- **Spotlight:** si tratta di una luce che simula il funzionamento di un faretto direzionale. Anziché emettere raggi di luce di ugual intensità in tutte le direzioni, una spotlight emette con maggiore intensità lungo una direzione specifica e l'intensità dei raggi decade man mano che ci si allontana da questa direzione. Bisogna specificare: a) la direzione  $s$  della spotlight, b) l'angolo di apertura massimo oltre il quale l'intensità è 0 (cutoff angle), una legge di decadimento angolare che controlla quanto velocemente l'intensità decresce deviando dalla direzione dello spotlight. Se  $I$  è l'intensità lungo la direzione  $s$ , l'intensità lungo un'altra direzione  $s'$ , si prende pari a  $I(s \cdot s')^k$  dove  $k$  è un parametro che determina l'andamento del decadimento.
- **Distant light:** si tratta di una sorgente posta all'infinito i cui raggi arrivano sulla scena tutti paralleli (luce direzionale). Per specificarla quindi è sufficiente una intensità ed una **direzione** (non una posizione). Viene usata per simulare sorgenti luminose tipo il sole; è quindi adatta per esterni.

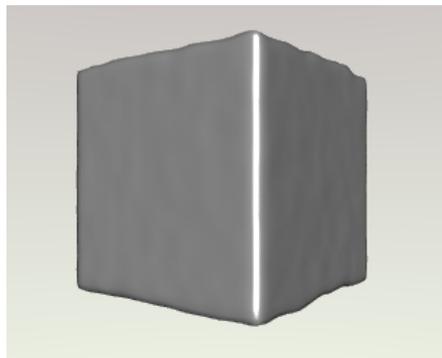
- **Hemispherical light:** in questo caso i raggi luminosi arrivano da una semisfera e può essere utile per simulare la luce diffusa (al posto di una luce ambientale) in esterni.



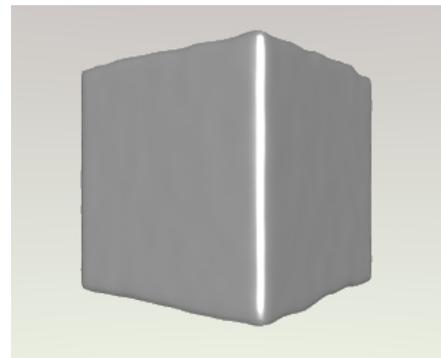
(26) Point light



(27) Spot light



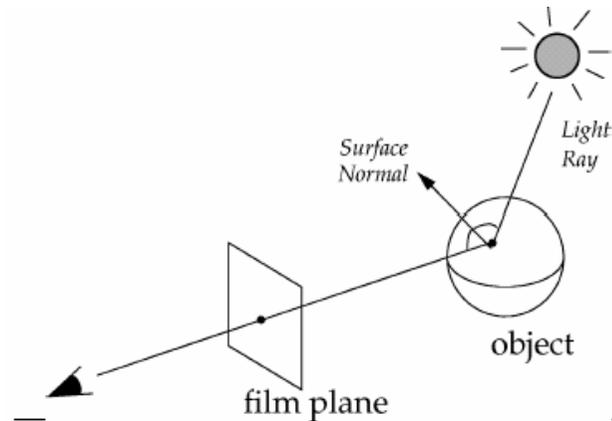
(28) Distant light



(29) Hemi light

## Rendering con ray casting

- Il rendering avviene secondo il paradigma del **ray-casting**: si “gettano” (cast) i raggi uscenti da ciascun pixel per calcolarne il colore.



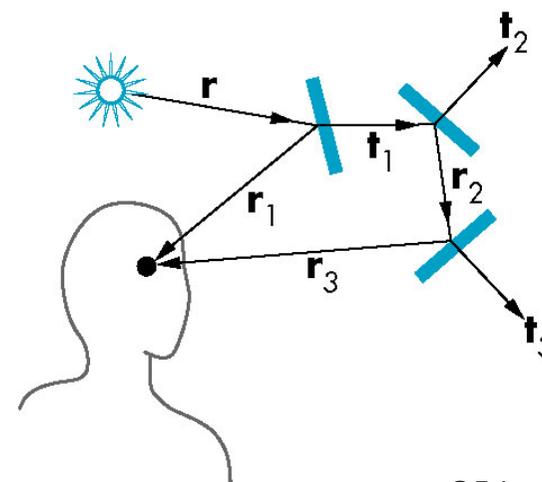
©Van Dam

- Dovendo assegnare un colore ad ogni pixel, consideriamo il raggio ottico uscente da ciascun pixel.
- Un raggio ottico è una semiretta uscente dal COP che interseca il piano vista.
- Se il raggio non interseca alcun oggetto della scena allora gli assegno il colore di sfondo.
- Se il raggio interseca un oggetto, allora devo calcolare l'illuminazione  $I^{out}$  (il colore) nel punto di intersezione ed assegnarlo al pixel.
- Per calcolare il colore applico il modello locale (di Phong).

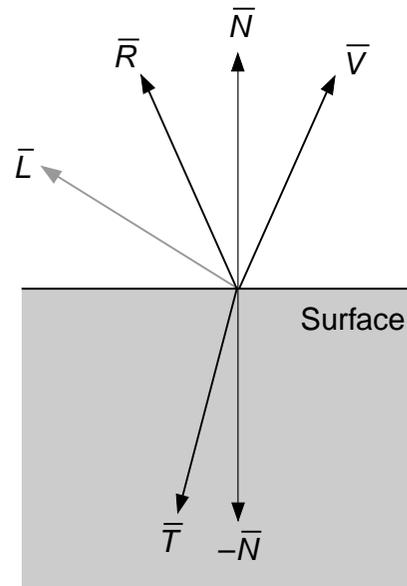
- In generale, c'è un pesante onere computazionale nel calcolo delle intersezioni raggio-oggetti.
- Si possono facilmente aggiungere le ombre tracciando il raggio che connette il punto d'intersezione con la sorgente luminosa (*shadow ray*): se esso interseca qualche oggetto allora il punto è in ombra.
- Il ray-casting è un modo intuitivo e facilmente implementabile per effettuare il rendering, anche se poco efficiente, come vedremo.

## Ray-tracing

- Il ray-tracing (Whitted, 1980), applica una tecnica ricorsiva e globale per calcolare l'illuminazione in un punto della superficie.
- Si inizia come nel ray casting, tracciando il raggio ottico uscente da un pixel.
- Nel punto di intersezione del raggio con la superficie si applica il modello di illuminazione preferito (es. Phong) per le sorgenti luminose visibili da quel punto (si scoprono tracciando gli shadow rays).
- A partire dal punto di intersezione del raggio con la superficie, si tracciano altri due raggi: uno raggio di riflessione ed uno di rifrazione, per raccogliere altri contributi all'illuminazione, dovuti alla riflessione ed alla rifrazione (se l'oggetto è trasparente).
- Si applica il processo ricorsivamente, finché un raggio incontra una sorgente luminosa oppure si perde all'infinito.



©E.Angel



©Foley et al.

- Il modello di illuminazione di Whitted si scrive:

$$I^{out} = I_a k_a + I(k_d(\mathbf{n} \cdot \mathbf{l}) + k_s(\mathbf{n} \cdot \mathbf{h})^n) + k_s I_r + k_t I_t \quad (2)$$

- La prima parte coincide con il modello locale di Phong, ed è il contributo dovuto alla illuminazione diretta da parte della sorgente luminosa. Gli ultimi due termini sono i contributi della luce riflessa specularmente che incide lungo la direzione  $\mathbf{r}$ ,  $I_r$ , e della luce trasmessa che incide lungo una direzione  $\mathbf{t}$ ,  $I_t$ , determinata dalla legge di Snell per la rifrazione.
- Ray-tracing non tiene conto della componente diffusiva della illuminazione indiretta, ovvero la porzione di luce diffusa non illumina gli altri oggetti.
- Ray-tracing funziona bene per superfici trasparenti e riflettenti.



©Alan Watt

## Radiosity

- Radiosity (Goral et al. 1984) è un algoritmo globale che è un po' il complementare di ray-tracing.
- Assume scene con superfici lambertiane (diffusori perfetti)
- Tutte le superfici della scena sono suddivise in frammenti chiamati "patch"
- La radiosità (illuminazione) in un patch è data dalla (eventuale) luce emessa e dalla diffusione della luce che arriva da tutti gli altri patch della scena.
- Ogni patch è trattato come una sorgente luminosa.
- È pesante computazionalmente: ciascun patch dipende da tutti gli altri che sono da esso visibili, e per questo bisogna risolvere il problema della rimozione delle superfici nascoste dal punto di vista di ciascun patch della scena.

## Equazione della radiosità.

- Assumiamo superfici Lambertiane, quindi:
  - la BRDF è costante sull dominio angolare:  $\rho = \frac{\rho_d(x)}{\pi}$
  - $B(x) = L(x) \int_{\Omega} \cos \theta d\omega = \pi L(x)$
- Riscriviamo l'equazione della radianza (molt. per  $\pi$ ):

$$\pi L(x) = \pi L_e(x) + \pi \rho(x) \int_{\Omega} L(x, \omega_i) (\omega_i \cdot \mathbf{n}) d\omega_i$$

Ovvero

$$B(x) = \pi B_e(x) + \rho_d(x) \int_{\Omega} L(x, \omega) \cos \theta d\omega$$

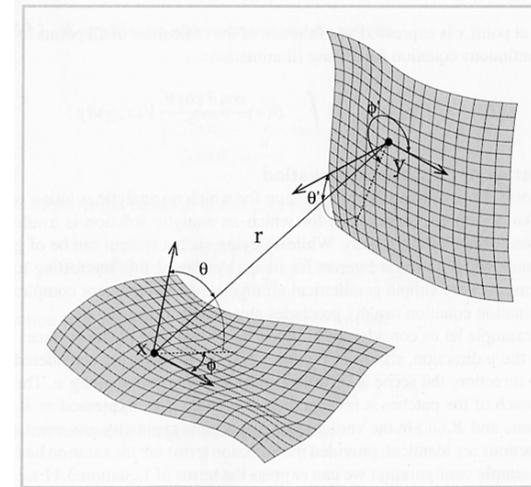
- Il termine integrale tiene conto della illuminazione ricevuta, e non si può eliminare la direzionalità. Possiamo però convertirlo da integrale su una semisfera di direzioni ad un integrale su tutte le superfici della scena,  $S$ .
- Usiamo il seguente fatto: un elemento infinitesimale di superficie di una sfera  $dx$  sottende un angolo solido  $d\omega = \frac{dx}{r^2}$ . Per un generico elemento di superficie orientato arbitrariamente bisogna tenere conto della proiezione dell'area:

$$d\omega = \frac{\cos \theta dx}{r^2}$$

dove  $\theta$  è l'angolo formato dal raggio e dalla normale a  $dx$ .

- Sia  $y$  il punto visibile da  $x$  nella direzione  $\omega$  e sia  $\omega'$  l'angolo sotto cui  $y$  vede  $x$  allora:

$$L(x, \omega) = L(y, \omega') = \frac{B(y)}{\pi}$$



©U. Wisconsin

- Otteniamo così l'**equazione della radiosità**:

$$B(x) = B_e(x) + \rho_d(x) \int_S B(y) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy$$

dove  $V(x, y)$  è il termine di visibilità, e vale 1 sse  $x$  è visibile da  $y$ .

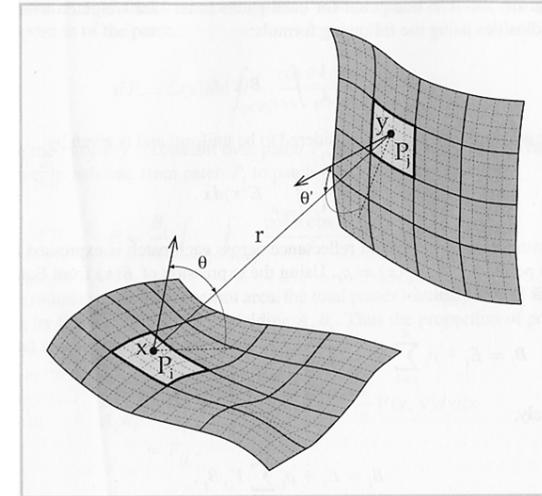
- L'equazione della radiosità lega la radiosità di tutte le superfici (diffusive) della scena. Per risolverla la discretizziamo.

## Equazione della radiosità discretizzata

- Assumiamo che il mondo sia composto da  $N$  patch disgiunte  $P_j$ ,  $j = 1 \dots n$  ciascuna con area  $A_j$ . Definiamo:

$$B_i = \frac{1}{A_i} \int_{P_i} B(x) dx \quad E_i = \frac{1}{A_i} \int_{P_i} B_e(x) dx$$

(Attenzione: la  $E_i$  non c'entra nulla con l'irradianza)



©U. Wisconsin

- Approssimiamo l'integrale con una somma sulle patch:

$$B(x) = B_e(x) + \rho_d(x) \sum_{j=1}^N \int_{P_j} B(y) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy$$

ed applicando la definizioni otteniamo:

$$\begin{aligned} B_i &= \frac{1}{A_i} \int_{P_i} B(x) dx = \frac{1}{A_i} \int_{P_i} \left( B_e(x) + \rho_d(x) \sum_{j=1}^N \int_{P_j} B(y) \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy \right) dx \\ &= E_i + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j \frac{1}{A_i} \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy dx \end{aligned}$$

- Definiamo il **fattore di forma**  $F_{ij}$

$$F_{ij} = \frac{1}{A_i} \int_{x \in P_i} \int_{y \in P_j} \frac{\cos \theta \cos \theta'}{\pi r^2} V(x, y) dy dx$$

che dipende solo dalla geometria della scena, ed è proporzionale alla potenza trasferita dal patch  $P_i$  al patch  $P_j$ .

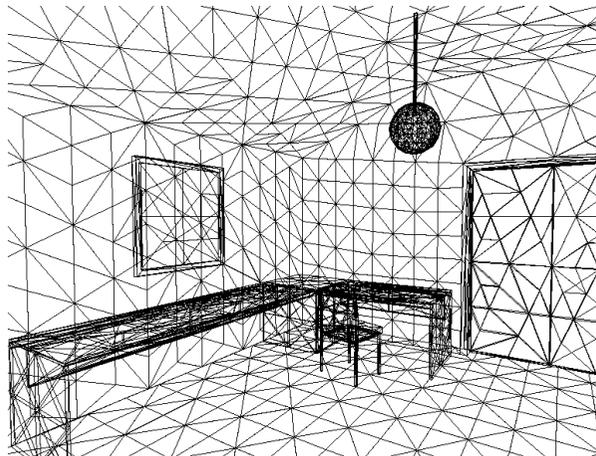
- La formulazione **discreta** della equazione della radiosità si scrive:

$$B_i = E_i + \rho_i \sum_{j=1}^N B_j F_{ij}$$

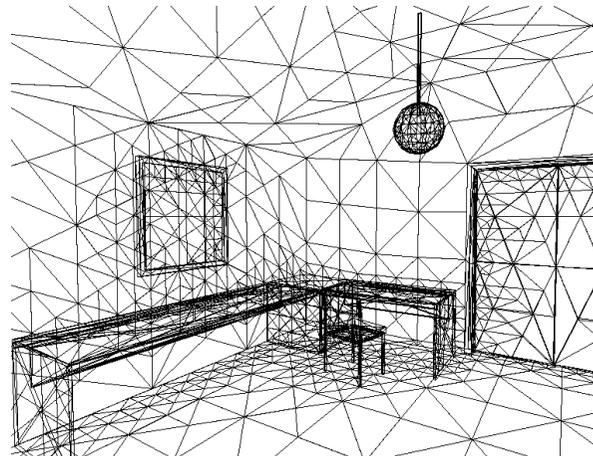
- È un sistema lineare  $N \times N$  ( $N$  è grande: i patch sono solitamente di più dei poligoni). La risoluzione fornisce la radiosità per tutti i patches, view-independent.

## Problemi

- Scelta dei patch? (suddivisioni adattative)
- Soluzione del sistema lineare di grandi dimensioni? (metodi iterativi)
- Calcolo dei fattori di forma: bisogna risolvere un problema di visibilità di tutti i patch con tutti gli altri.



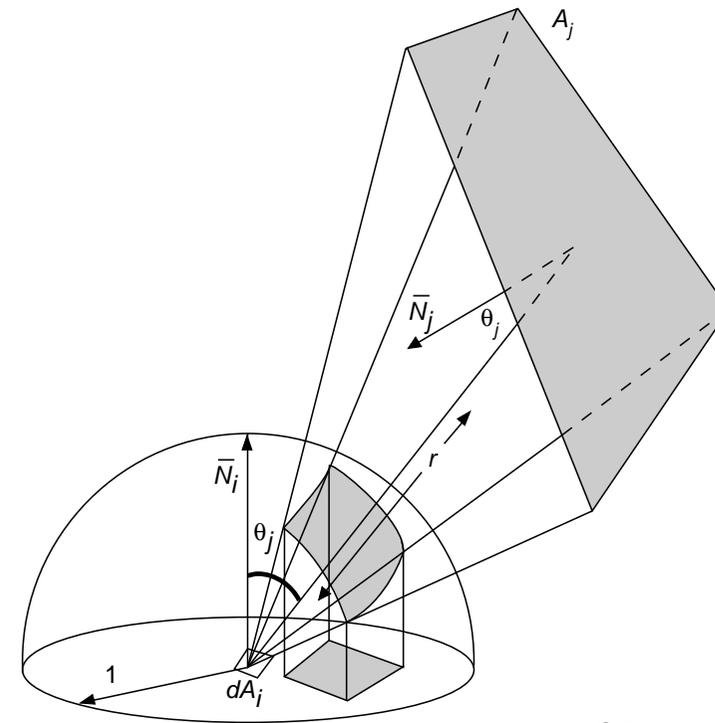
(30) Mesh iniziale



(31) Raffiamento adattativo

©Alan Watt

Il metodo di Nusselt per calcolare il fattore di forma tra un'area differenziale  $dA_j$  ed un patch  $A_j$  consiste nel proiettare il patch sulla superficie della sfera, e poi sulla base della semisfera. Il rapporto tra le aree è il fattore di forma.



©Foley et .al



©Alan Watt



(32) scan line with Phong



(33) ray-tracing



(34) radiosity + ray-tracing



(35) RADIANCE (Monte Carlo)